XIII Olimpíada de Matemática do Cone Sul

Segundo Dia — Fortaleza, 26 de junho de 2002

▸ PROBLEMA 4

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que suas diagonais AC e BD são perpendiculares. Seja P a interseção de AC e BD e seja M o ponto médio de AB. Mostre que o quadrilátero $ABCD$ é inscritível se, e somente se, as retas PM e CD são perpendiculares.

▸ PROBLEMA 5

Considere o conjunto $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Para cada inteiro k, seja r_k a maior quantidade de elementos distintos de A que podemos escolher de maneira que a diferença entre dois números escolhidos seja sempre diferente de k. Determine o maior valor possível de r_k, onde $1 \leqslant k \leqslant \dfrac{n}{2}$.

▸ PROBLEMA 6

Dizemos que um inteiro n, $n > 1$, é *ensolarado* se ele é divisível pela soma dos seus fatores primos. Por exemplo, 90 é ensolarado pois $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ e $2 + 3 + 5 = 10$ divide 90. Mostre que existe um número ensolarado com pelo menos 10^{2002} fatores primos distintos.

Cada problema vale 10 *pontos*

Duração da Prova: 4 *horas*